

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени В.Н. Каразина



**Теорема об изменении импульса
системы частиц и о движении
центра инерции**

Пособие для самостоятельной работы по
курсу теоретической механики
Для специальности 2014 «механика».

Методические указания
для студентов специальности "механика"

2009 г.

Методичні вказівки присвячені вивченню студентами розділів курсу “Теоретична механіка”, пов’язаних с поняттями імпульса (кількості руху) та центра інерції, що являються фундаментальними динамічними характеристиками системи матеріальних точок.

В них містяться контрольні питання для самоперевірки ступеня засвоювання відповідного теоретичного матеріалу, а також вказівки до розв’язування типових задач з докладним обговорюванням використаних при цьому відомостей з теорії.

Укладачі : Л.П. Терехов та Ю.І. Руднєв.

§1. Импульс системы частиц и его изменение а процессе движения.

- 1) Как определяется импульс частицы в системе частиц?
- 2) Записать выражение для импульса сплошного тела.
- 3) Какую размерность имеет импульс системы частиц?
- 4) Является ли импульс системы частиц аддитивной величиной?
- 5) Показать, исходя непосредственно из определения, что импульс однородного диска, вращающегося вокруг оси, которая перпендикулярна его плоскости и проходит через его центр, равен нулю.
- 6) Как связаны между собой импульсы системы частиц в двух движущихся относительно друг друга системах координат?
- 7) Как формулируется теорема об изменении импульса системы частиц?
- 8) Почему в формулировку теоремы не входят внутренние силы?
- 9) Как формулируется эта теорема в неинерциальной системе координат?
- 10) Как определяется первый интеграл уравнений движения системы частиц?
- 11) Какие первые интегралы и при каких условиях можно получить из теоремы об изменении импульса системы частиц?
- 12) Сколько независимых первых интегралов можно получить из этой теоремы?
- 13) Какая система частиц называется изолированной?
- 14) Что можно сказать об импульсе изолированной системы частиц?
- 15) Влияют ли внутренние силы системы частиц на изменение ее импульса, если а) система частиц является изолированной, б) система частиц является неизолированной?
- 16) В любой ли системе координат импульс изолированной системы частиц остается постоянным?

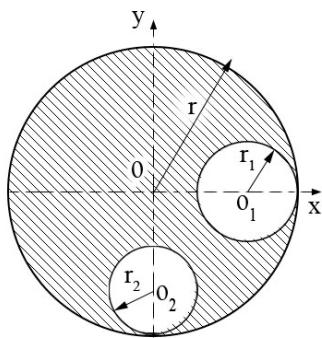
§2. Центр инерции системы частиц и его движение.

- 1) Как определяется центр инерции системы частиц?
- 2) Записать выражение для радиус-вектора центра инерции сплошного тела.
- 3) Зависит ли положение центра инерции от выбора начала отсчета радиус-векторов частиц системы?
- 4) Зависит ли положение центра инерции от выбора осей координат, по отношению к которым рассматривается движение системы частиц?
- 5) Как определяется ось и плоскость динамической симметрии системы частиц?
- 6) Что можно сказать о положении центра инерции системы частиц, имеющей ось и плоскость динамической симметрии?
- 7) Найти положение центра инерции системы двух частиц массы m_1 и m_2 , расстояние между которыми равно ℓ
- 8) Найти положение центра инерции уголка, образованного двумя однородными стержнями длины ℓ_1 и ℓ_2 , имеющими массы m_1 и m_2 соответственно. Угол между стержнями равен α .
- 9) Определить положение центра инерции однородной фигуры массы m , полученной из круга путем врезания двух круговых отверстий (см. рис.). Радиус круга r , радиусы отверстий r_1 и r_2 .

Решение.

Идея решения заключается в том, что при заполнении дырок веществом с плотностью исходного тела, получается однородный диск радиуса r , положение центра инерции которого известно. Поэтому задача сводится к нахождению центра инерции одного из тел системы, когда положения центров инерции остальных тел системы и всей системы, заданы.

Введем оси координат xOy как показано на рисунке. Пусть X и Y - координаты центра инерции заданного тела. Весь сплошной диск, центр инерции которого находится в точке O , состоит из заданного тела и двух дисков с центрами в точках O_1 и O_2 . Поэтому



$$O = \frac{mx + m_1x_{o1} + m_2x_{o2} + m_2x_{o2}}{m + m_1 + m_2}; \quad O = \frac{my + m_1y_{o1} + m_2y_{o2}}{m + m_1 + m_2}, \text{ где}$$

$$m_1 = \rho\pi r_1^2; \quad m_2 = \rho\pi r_2^2; \quad \rho = \frac{m}{\pi(r^2 - r_1^2 - r_2^2)}.$$

Окончательно имеем

$$X = -\frac{(r-r_1)r_1^2}{r^2 - r_1^2 - r_2^2}; \quad Y = -\frac{(r-r_2)r_2^2}{r^2 - r_1^2 - r_2^2}$$

- 10) Как связан импульс системы частиц со скоростью ее центра инерции?
- 11) Чему равен импульс твердого тела, вращающегося вокруг неподвижного центра инерции?
- 12) Как формулируется теорема о движении центра инерции системы частиц?
- 13) Какие первые интегралы и при каких условиях можно получить из этой теоремы?
- 14) Как движется центр инерции изолированной системы частиц?
- 15) В любой ли системе координат центр инерции изолированной системы частиц движется прямолинейно и равномерно или покоится?
- 16) В каком случае можно определить движение центра инерции, не находя закона движения каждой частицы системы?
- 17) Как движется центр инерции системы частиц, находящийся в поле сил тяжести?
- 18) На систему частиц действуют внешние силы $\vec{F}^{(e)}_i = -m_i\vec{r}_i$ ($i=1, \dots, N$), где m_i - масса i -ой частицы. Что можно сказать о движении центра инерции этой системы?
- 19) Влияют ли внутренние силы на движение центра инерции
 - а) изолированной системы частиц,
 - в) неизолированной системы частиц?
- 20) Тяжелый стержень падает в вертикальной плоскости, скользя одним концом по гладкой горизонтальной прямой. Что можно сказать о движении его центра инерции, если в начальный момент стержень покоился?

Ответ. Центр инерции движется по вертикали.

- 21) Показать, что перемещение центра инерции системы и частиц системы за один и тот же промежуток времени связан соотношением

$$\Delta\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \Delta\vec{r}_i}{m}.$$

- 22) Пусть в некоторый момент времени частицы M_1 и M_2 занимали положения А и В соответственно. За некоторый промежуток времени они поменялись местами. Как при этом переместился их центр инерции?

Ответ. $\Delta\vec{r}_c = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(AB)$

- 23) Герой пьесы Э. Ростана Сирано де Бержерак убеждал, что добраться до Луны можно следующим образом:

Лечь на железный лист и сильными рывками

Магнит подбрасывать, он лист железный с вами

Подтянет кверху. Вы опять

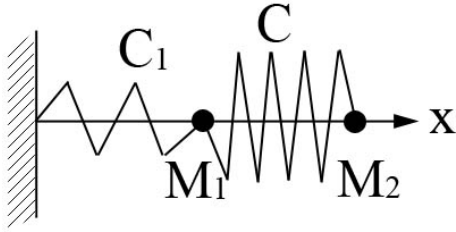
Так до Луны и упражняйтесь!

Почему это невозможно?

- 24) Определить движение центра инерции системы, состоящей из двух частиц равной массы при наличии пружин, имеющих жесткости C_1 и C

Решение

Пусть x_1 и x_2 - координаты частиц M_1 и M_2 , отсчитываемые от их положений в состоянии, когда пружины нерастяннуты. Уравнение движения системы имеют вид



$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -c_1x_1 + c(x_2 - x_1), \\ m\ddot{x}_2 = -c(x_2 - x_1) \end{cases} \quad (1)$$

Будем искать частные решения этой системы уравнений в форме

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \lambda) ; x_2 = A_2 \cos(\omega t + \lambda) \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$\begin{cases} \left(\frac{c+c_1}{m} - \omega^2\right)A_1 - \frac{c}{m}A_2 = 0 \\ -\frac{c}{m}A_1 + \left(\frac{c}{m} - \omega^2\right)A_2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Так как ищутся нетривиальные решения, то определитель этой системы линейных однородных уравнений относительно A_1 и A_2 должен равняться нулю.

$$\begin{vmatrix} \frac{c+c_1}{m} - \omega^2 & -\frac{c}{m} \\ -\frac{c}{m} & \frac{c}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Отсюда находим возможные значения частоты ω :

$$\omega_1^2 = \frac{c_1 + 2c + \sqrt{c_1^2 + 4c^2}}{2m} ; \omega_2^2 = \frac{c_1 + 2c - \sqrt{c_1^2 + 4c^2}}{2m} \quad (4)$$

Поэтому имеется два линейно независимых решения системы (2):

$$x_1^{(1)} = A_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \lambda_1) ; x_2^{(1)} = A_2^{(1)} \cos(\omega_1 t + \lambda_1) \quad (5)$$

$$x_1^{(2)} = A_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \lambda_2) ; x_2^{(2)} = A_2^{(2)} \cos(\omega_2 t + \lambda_2) \quad (6)$$

Подставляя (5) в первое уравнение системы (3), получим

$$(c_1 - \sqrt{c_1^2 + 4c^2})A_1^{(1)} - 2cA_2^{(1)} = 0$$

Следовательно,

$$A_1^{(1)} = 2cM ; A_2^{(1)} = (c_1 - \sqrt{c_1^2 + 4c^2})M, \text{ где } M - \text{любое.}$$

Аналогично находим

$$A_1^{(2)} = 2cN ; A_2^{(2)} = (c_1 + \sqrt{c_1^2 + 4c^2})N, \text{ где } N - \text{любое.}$$

Тогда общее решение системы (1) имеет вид

$$x_1 = 2cM \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + 2cN \cos(\omega_2 t + \alpha_2),$$

$$x_2 = (c_1 - \sqrt{c_1^2 + 4c^2})M \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + (c_1 + \sqrt{c_1^2 + 4c^2})N \cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$

Пусть для определенности при $t = 0$:

$$x_1^0 = x_2^0 = 0 ; \dot{x}_1^0 = 0 ; \dot{x}_2^0 = V_0$$

Решение, соответствующее этим начальным условиям следующее:

$$x_1 = -\frac{cV_0}{\omega_1\sqrt{c_1^2 + 4c^2}}\sin\omega_1 t + \frac{cV_0}{\omega_2\sqrt{c_1^2 + 4c^2}}\sin\omega_2 t;$$

$$x_2 = -\frac{(c_1 - \sqrt{c_1^2 + 4c^2})V_0}{2\omega_1\sqrt{c_1^2 + 4c^2}}\sin\omega_1 t + \frac{(c_1 + \sqrt{c_1^2 + 4c^2})V_0}{2\omega_2\sqrt{c_1^2 + 4c^2}}\sin\omega_2 t$$

Окончательно, положение центра инерции C исследуемой системы определяется его координатой

$$x_c = a + \frac{mV_0}{2\sqrt{c_1^2 + 4c^2}}\left(-\frac{\omega_2^2}{\omega_1}\sin\omega_1 t + \frac{\omega_1^2}{\omega_2}\sin\omega_2 t\right),$$

где λ - постоянная величина.

Отсюда видно, что с изменением характера внутреннего взаимодействия, т.е. жесткости пружины C , меняется закон движения центра инерции.

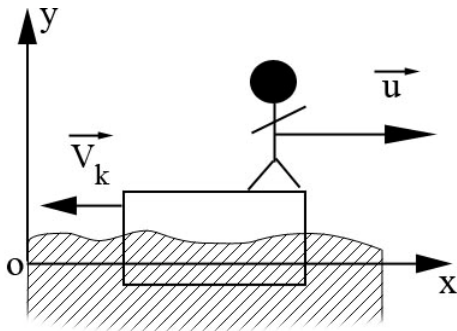
Рассмотренный пример еще раз подчеркивает то, что в неизолированной системе частиц внутренние силы влияют на характер движения центра инерции.

§3. Задачи

Задача 1. На краю неподвижного плота массы M стоят n мальчиков одинаковой массы m , которые затем один за другим спрыгивают в воду со скоростью \vec{u} относительно плота. Какую скорость приобретет плот после того, как с него спрыгнут все мальчики? Сопротивлением воды движению плота пренебречь.

Решение

Движение плота и мальчиков будем рассматривать в инерциальной системе координат $хоуz$, которая связана с неподвижной водой. Пусть они перемещаются вдоль оси Ox .



Для системы состоящей из плота и K мальчиков, проекция импульса на ось Ox постоянна, так как все внешние силы (силы тяжести и выталкивающая сила) направлены по вертикали. Обозначим через \vec{V}_{k-1} и \vec{V}_k скорости плота до и после спрыгивания k -того мальчика. Тогда импульс системы до спрыгивания равен $\{M + m(n - k - 1)\}\vec{V}_{k-1}$, а после спрыгивания $-\{M + m(n - k)\}\vec{V}_k + m(\vec{V}_k + \vec{u})$.

Приравнявая проекции этих импульсов на ось Ox , получим

$$\{M + m(n - k + 1)\}V_{k-1,x} = \{M + m(n - k)\}V_{k,x} + m(V_{k,x} + u).$$

Тогда

$$V_{k,x} = V_{k-1,x} - \frac{mu}{M + m(n - k - 1)} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

Где $V_0 = 0$. Поэтому скорость плота после спрыгивания мальчиков равна по величине

$$V_n = mu \left\{ \frac{1}{M + m} + \frac{1}{M + 2m} + \dots + \frac{1}{M + nm} \right\}$$

И направлена противоположно скорости \vec{u} .

Замечания. 1) Найдем скорость \vec{V} , которую приобретет плот, если все мальчики спрыгнут одновременно. Имеем аналогично предыдущему

$$0 = MV_x + mn(V_x + u).$$

$$\text{Следовательно, } V_x = -\frac{mnu}{M + mn}$$

2) Сравним окончательно скорости плота в двух случаях.

Так как

$$\frac{1}{M+m} + \frac{1}{M+2m} + \dots + \frac{1}{M+nm} > \frac{1}{M+nm} + \frac{1}{M+nm} + \dots + \frac{1}{M+nm} = \frac{n}{M+nm},$$

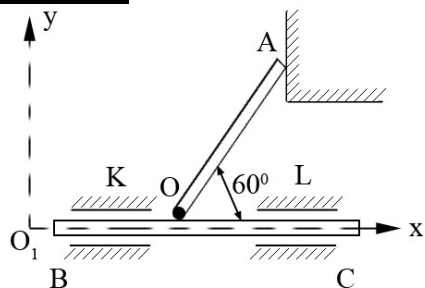
то $V_n > V$, т.е. в случае последовательного спрыгивания мальчиков плот приобретает большую скорость, чем при одновременном спрыгивании.

3) Нужно помнить, что вычисляя импульс системы частиц в некоторой системе координат, необходимо находить импульс тел, составляющих систему, в той же системе координат.

Задача 2.

Однородный стержень OA длины l и массы m расположен в вертикальной плоскости и шарнирно связан со стержнем BC массы $3m$, имеющим возможность двигаться в горизонтальных направляющих K и L . Стержень OA срывается с выступа N и падает на стержень BC . Пренебрегая трением в опорах, определить смещение, которое получит при этом стержень BC .

Решение.



Движение системы, состоящей из стержней BC и OA , будем рассматривать в системе координат xO_1y , которая связана с неподвижными направляющими K и L .

Все внешние силы (силы тяжести и силы реакций направляющих K и L) вертикальны. Поэтому $F_x^{(e)} = 0$.

Тогда из теоремы о движении центра инерции следует, что $V_{Dx} = \text{const}$ (D – центр инерции системы). Так как в начальный момент стержни были неподвижны, то $V_{Dx} = 0$ и во все время движения выполняется соотношение $x_D = \text{const}$.

Обозначим через Δx и Δx_1 смещения центров инерции стержней BC и OA вдоль оси O_1x за время падения стержня OA . Эти смещения связаны соотношением

$$3m\Delta x + \Delta x_1 m = 0$$

В силу условия $x_D = \text{const}$

Стержень BC движется поступательно. Поэтому $\Delta x_1 = \Delta x + \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2} \cos 60^\circ\right)$. Тогда

$$3m\Delta x + m\left(\Delta x + \frac{l}{4}\right) = 0$$

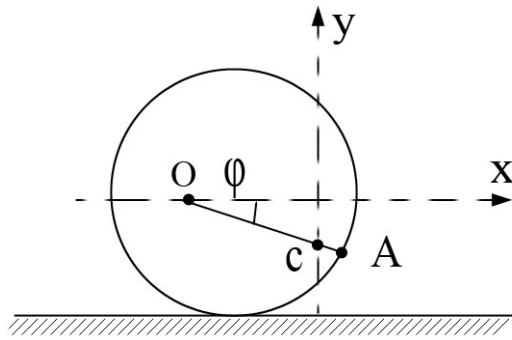
$$\text{Окончательно } \Delta x = -\frac{l}{16},$$

т.е. стержень BC сместится влево на $\frac{l}{16}$.

Задача 3.

Найти траекторию колечка A массы m , которое скользит без трения АО обручу массы M и радиуса r , касающемуся гладкой горизонтальной прямой. В начальный момент времени система находилась в покое.

Решение.



Движение системы, состоящей из обруча и колесика, будем рассматривать в системе координат $x_{O_1}y$ (см. рис.), выбранной так, чтобы в начальный момент центр инерции находился на оси O_1y , и связанной с горизонтальной прямой. Так как трение отсутствует, то проекция всех внешних сил (сил тяжести и нормальной реакции прямой), действующих на систему, на ось O_1x равна нулю. Отсюда, с учетом начальных условий имеем $x_c = const$, т.е. центр инерции C движется вдоль оси O_1y . Найдем CA из соотношений $M \cdot OC = mCA$ и $OC + CA = r$. Имеем $CA = \frac{Mr}{m+M}$. Обозначим угол между осью O_1x и прямой OA через φ .

Тогда $x_A = \frac{Mr}{m+M} \cos \varphi$; $y_A = -r \sin \varphi$.

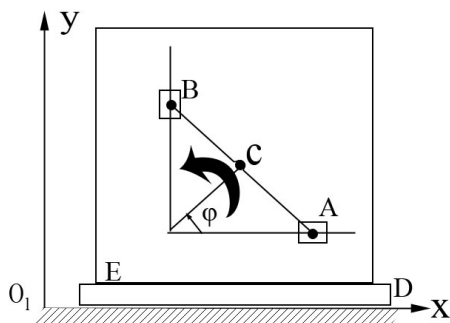
Исключая из этих уравнений φ , получим

$$\frac{x_A^2}{(Mr/(M+m))^2} + \frac{y_A^2}{r^2} = 1.$$

Следовательно, колесико движется по эллипсу.

Задача 4.

На вертикальной пластине E , связанной с плитой D , лежащей на горизонтальной гладкой плоскости, укреплен механизм эллипсографа. Кривошип OC длины l начинает вращаться с постоянной угловой скоростью ω . Определить закон движения плиты, если массы ползунов A и B равны m , масса плиты с пластиной равна $16m$, а массы кривошипа и линейки пренебрежимо малы. В начальный момент плита D находилась в покое, ползун A занимал крайнее правое положение ($OC = BC = CA$).



Решение.

Движение системы, состоящей из пластины, плиты и эллипсографа, будем рассматривать в системе координат $x_{O_1}y$, которая связана с горизонтальной плоскостью. Пусть в начальный момент точка O находилась на оси O_1y . Положение плиты и пластины в любой момент времени можно описать, задав абсциссу точки O - x_0 . Для нахождения зависимости $x_0 = x_0(t)$ применим теорему о движении центра инерции. Так как все внешние силы, действующие на систему параллельно оси O_1y при $\ddot{x}_p = 0$ (точка p - центр инерции системы). Выразим x_p через x_0 , учитывая, что центр инерции ползунов A и B совпадает с точкой C (по условиям задачи $BC = CA$),

$$18mx_p = 16mx_0 + 2m(x_0 + l \cos \varphi) + const.$$

Подставив выражение для x_p в соотношение $\ddot{x}_p = 0$, получим уравнение для нахождения x_0 :

$$\ddot{x}_0 = \frac{1}{9} l \omega^2 \cos \omega t \quad (\varphi = \omega t).$$

Тогда $x_0 = -\frac{1}{9} l \cos \omega t + c_1 t + c_2$

Удовлетворяя начальным условиям

$$x_0(0) = 0, \quad \ddot{x}_0(0) = 0,$$

окончательно имеем

$$x_0 = \frac{l}{9} (1 - \cos \omega t).$$

Замечания 1) Пусть начальные условия в рассмотренной задаче изменены следующим образом: плита D покоится, а ползун B занимает крайнее верхнее положение. Тогда

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \omega t \text{ и } x_0 = \frac{l}{9} \sin \omega t + C_1 t + C_2.$$

Удовлетворяя начальным условиям $x_0(0) = \dot{x}_0(0) = 0$, получим

$$x_0 = \frac{l}{9} \sin \omega t - \frac{l\omega}{9} t.$$

Таким образом, в этом случае движение плиты есть суперпозиция равномерного и колебательного движений, а центр инерции всей системы движется по закону:

$$x_p = -\frac{l\omega}{9} t + \text{const}. \text{ То, что } V_{px} = -\frac{l\omega}{9} \text{ следует из того, что при } t=0 \quad V_{Ax} = -2\omega l V_{Bx} = 0, \text{ а}$$

при дальнейшем движении $F_x^{(e)} = 0$

Данное движение реализуется следующим образом: необходимо удерживать плиту внешней силой в покое, считая кривошип OC равномерно вращающимся вокруг точки O , а в тот момент времени, когда ползун B займет крайнее верхнее положение, эту силу убрать.

2) Так как плита D во время движения касается горизонтальной плоскости, то

$$y_p = y_0 + \frac{l}{9} \sin \omega t + \text{const} \quad (y_0 - \text{постоянно}).$$

Поэтому можно легко найти нормальную реакцию плоскости.

Проектируя соотношение $18m\ddot{W}_p = \vec{F}^{(e)}$ на ось O_1y , получим

$$18m\ddot{y}_p = -18mg + R_y.$$

Окончательно,

$$R_y = 18mg \left(1 - \frac{l\omega^2}{9g} \sin \omega t\right).$$

Для того, чтобы движение плиты было безотрывным от горизонтальной плоскости, во все время должно выполняться условие $R_y \geq 0$. Это условие будет выполнено, если

$$\omega^2 \leq \frac{9g}{l}$$

В противном случае плита будет подпрыгивать над плоскостью.